Examen de Álgebra

ETSICCP, UPV. Septiembre 2011

Ejercicio 1

(a) En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se considera la matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

(a.1) (2 ptos.) Comprobar que se espectro es $\sigma(M) = \{a+b, a-b\}$

(a.2) (2 ptos.) Sabiendo que $b \neq 0$, calcular los subespacios propios.

(b) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b.1) (1 pto.) Hallar su polinomio característico y comprobar que sus valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$.

(b.2) (2 ptos.) Determinar los subespacios propios $E_{\lambda_1=3}$ y $E_{\lambda_2=1}$.

(b.3) (2 ptos.) Comprobar que los subespacios calculados en el apartado anterior son suplementarios.

(b.4) (1 pto.) Hallar una matriz diagonal D y otra regular P tales que permitan escribir la relación $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 2

En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio $H = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(b.1) (2 ptos.) Hallar las ecuaciones paramétricas y una base de H.

(b.2) (2 ptos.) Hallar una B.O.N. de H.

(b.3) (2 ptos.) Determinar la matriz P asociada a la proyección ortogonal sobre H, en la base canónica.

(b.4) (4 ptos.) Dado el vector $x = (1,1,1)$, hallar su proyección ortogonal y su simetría ortogonal respecto del subespacio H del apartado anterior.

Ejercicio 3

(a) Considerar la forma cuadrática

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a.1) (1 pto.) Determinar los menores angulares de A.

(a.2) (3 ptos.) Calcular la descomposición LDL^T de la matriz A.

(a.3) (2 ptos.) Clasificar la forma cuadrática.

(b) (4 ptos.) Clasificar la cuádrica

$$k \equiv [\, x_1 \; x_2 \; x_3 \; 1 \,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,.$$