Examen de Álgebra Lineal*

E. T. S. I. C. C. P. Curso 2009/10

Convocatoria: Septiembre, 2010

Ejercicio 1

- **(a)** (3 PTOS.) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de modo que v es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -1$. De las siguientes relaciones, deducir la que es correcta y demostrarla

  (a.1) $Ker\,(A+I) = \{0\}$.

  (a.2) $(A^2 - A)\,v = 2v$.

  (a.3) $A(-v) = -v$.

- **(b)** Considerar

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

  - **(b.1)** (2 PTOS.) Comprobar que su polinomio característico es $p(\lambda) = (-1)^3(\lambda-1)(\lambda+1)^2$, y encontrar su espectro.
  - **(b.2)** (3 PTOS.) Determinar una base de cada subespacio propio.
  - **(b.3)** (1 PTO.) Encontrar una matriz regular P y otra diagonal D tales que permitan escribir $A = PDP^{-1}$.
  - **(b.4)** (1 PTO.) A partir de la relación $A = PDP^{-1}$, determinar la matriz inversa de A.

Ejercicio 2

En $\mathbb{R}^3$ se considera el proyector ortogonal sobre el subespacio $H = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

- **(a)** (3 PTOS.) Determinar el valor del parámetro α sabiendo que la proyección ortogonal sobre H del vector $(1,2,0)$ es el mismo vector, es decir, $p\,(1,2,0) = (1,2,0)$.

- **(b)** (3 PTOS.) Considerar el anterior subespacio H para $\alpha = 0$. Sea s la simetría ortogonal respecto de H. Hallar la matriz $s_{C\times C}$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- **(c)** (4 PTOS.) Bajo las condiciones del apartado **(b)**, determinar un vector $u \in \mathbb{R}^3$, sabiendo que su simétrico respecto de H es el vector $s(u) = (1,1,1)$.

*Quienes se presenten a toda la asignatura deben resolver los ejercicios 1, 2, y 3. Quienes se presenten al segundo parcial, los ejercicios 2, 3 y 4. Recordar poner el nombre en todas las hojas, no mezclar dos ejercicios distintos en un mismo folio y entregar cada uno por separado.

Ejercicio 3

- **(a)** (1 PTO.) Definir expresión reducida de una forma cuadrática.
- **(b)** Sea la forma cuadrática
$$\Phi(x) = \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 + \frac{x_3^2}{2} + x_1 x_3\,.$$
    - **(b.1)** (4 PTOS.) Dar dos expresiones reducidas distintas de la forma cuadrática Φ.
    - **(b.2)** (1 PTO.) Determinar la signatura de Φ y clasificarla.
- **(c)** Considerar la cuádrica
$$k \equiv \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 + \frac{x_3^2}{2} + x_1 x_3 + 2\mu x_3 = 0\,.$$
    - **(c.1)** (1 PTO.) Obtener la expresión matricial de la cuádrica.
    - **(c.2)** (1 PTO.) Comprobar que para $\mu = 0$ es degenerada.
    - **(c.3)** (2 PTOS.) Clasificarla en el caso $\mu \neq 0$.

Ejercicio 4

- **(a)** (2 PTOS.) Señalar la condición que debe cumplir la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ para que admita descomposición QR.
- **(b)** Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$.
    - **(b.1)** (2 PTOS.) Hallar una base ortonormal de $Im\, A$.
    - **(b.2)** (4 PTOS.) Comprobar que A admite descomposición QR y realizarla.
    - **(b.3)** (2 PTOS.) Obtener la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.