Examen de Álgebra*

ETSICCP, UPV. Junio 2011

Ejercicio 1

(a) (2 ptos.) En $\mathbb{R}^n$ se consideran los subespacios no triviales S y T. Indicar cuando esos subespacios son suplementarios.

(b) En $\mathbb{R}^3$, considerar los subespacios

$$S =< \{(1,2,0),(0,1,-1)\} >;$$

$$T = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0;\; x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\right\}.$$

(b.1) (2 ptos.) Hallar las ecuaciones implícitas de S y una base de T.

(b.2) (2 ptos.) Comprobar que S y T son suplementarios.

(b.3) (1 pto.) Construir una base B de $\mathbb{R}^3$, de modo que $B = B_1 \bigcup B_2$, siendo B_1 y B_2 bases de S y T respectivamente.

(b.4) (3 ptos.) Descomponer el vector $z = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$ como suma de dos vectores $z = u + v$, donde $u \in S$ y $v \in T$.

Ejercicio 2

Considerar la matriz real y simétrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) (2 ptos.) Deducir que sus valores propios son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$.

(b) (3 ptos.) Calcular loss subespacios propios $T = E_{\lambda_1 = 8}$ y $S = E_{\lambda_2 = -1}$.

*Quienes se presenten al primer parcial, deben resolver los ejercicios 1, 2 y 3. Quienes se presenten a toda la asignatura, los ejercicios 2, 3 y 4.

(c) (2 ptos.) Hallar $S^{\perp}$, es decir, el suplemento ortogonal del subespacio S dado en el apartado anterior.

(d) (3 ptos.) Determinar una matriz ortogonal P y otra diagonal D, tales que permitan escribir la relación $A = PDP^T$.

Ejercicio 3

(a) Dada la matriz simética $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

- **(a.1)** (1 pto.) Calcular sus menores angulares.
- **(a.2)** (3 ptos.) Hallar su descomposición $A = LDL^T$.
- **(a.3)** (2 ptos.) Clasificar la forma cuadrática $\Phi = x^T A x$.

(b) (4 ptos.) Clasificar la cuádrica

$$k \equiv [\, x_1 \; x_2 \; x_3 \; 1 \,] \begin{bmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,,$$

donde A es la matriz del apartado anterior.

Ejercicio 4

(a) Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matriz asociada, en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, de la proyección ortogonal sobre cierto subespacio H no trivial ($0 < dim\, H = r < n$).

- **(a.1)** (1 pto.) Determinar el espectro de P.
- **(a.2)** (2 ptos.) Indicar sus subespacios propios, indicando la dimensión de cada uno de ellos.

(b) (3 ptos.) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio $H = \{x \in \mathbb{R}^3 / \; x_2 = x_3\}$. Hallar la matriz P asociada a la proyección ortogonal sobre H, en la base canónica.

(c) (4 ptos.) Dado el vector $x = (1, 3, 1)$, hallar su proyección ortogonal y su simetría ortogonal respecto del subespacio H del apartado anterior.