Álgebra Lineal, 2007/08*

E.T.S.I.C.C.P. Junio, 2008

Ejercicio 1

(a) (2 ptos.) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $v \in Ker\,(A+I)$, calcular $A^2\,v - v$.

(b) Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- **(b.1)** (4 ptos.) Hallar una base de $Ker\,(A+I)$ y el rango de $(A-2I)$. Deducir, a partir de estos resultados, el espectro de A y razonar que es diagonalizable.
- **(b.2)** (4 ptos.) Diagonalizar A encontrando las matrices P regular y D diagonal, tales que permiten escribir la relación $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 2

Sea $x = (\alpha, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ y $H \subset \mathbb{R}^3$ un subespacio de dimensión 2.

(a) (3 ptos.) Sabiendo que la proyección ortogonal de x sobre $H^\perp$ es $(1,1,0)$, hallar $dim\,H^\perp$, $H^\perp$, H, α y x.

(b) (4 ptos.) Para el vector x obtenido en el apartado anterior, determinar la proyección ortogonal $p(x)$ de x sobre H, así como el simétrico $s(x)$ de x respecto de H, y comprobar que los tres vectores x, $p(x)$ y $s(x)$, son linealmente dependientes. Razonar si, en general, esta propiedad sería cierta para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$.

(c) (3 ptos.) Considerar el subespacio

$$S = \{\, (\beta, \gamma, 2\gamma)\, / \;\; \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,\},$$

hallar P_S (el proyector ortogonal sobre S), así como $P_{S^\perp}$ (el proyector ortogonal sobre $S^\perp$) y comprobar que A (el reflector ortogonal respecto de S) es $A = P_S - P_{S^\perp}$.

---

*Recordar poner el nombre en todas las hojas. No mezclar dos ejercicios distintos en un mismo folio. Entregar cada problema por separado. Quienes se presenten a segundo parcial deben realizar las preguntas 2, 3 y 4. Quienes se presenten a todo tienen que resolver los ejercicios 1, 2 y 3.

Ejercicio 3

(a) Sabemos que la cuádrica

$$k \equiv [\,x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; 1\,] \begin{bmatrix} A & \vdots & \gamma \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^T & \vdots & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,, \quad \gamma \in \mathbb{R}^3\,, \quad a_{44} \in \mathbb{R}\,,$$

es un paraboloide hiperbólico. Considerar la forma cuadrática

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \,/\;\; \Phi(x) = x^T A\, x\,,$$

siendo A la anterior matriz, y $x^T = [\,x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\,]$.

(a.1) (2 ptos.) Hallar, razonadamente, la signatura de Φ.

(a.2) (1 pto.) Clasificar la forma cuadrática Φ.

(b) Para los datos concretos $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $a_{44} = 0\,,$

(b.1) (3 ptos.) Calcular $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *traza* A, *det* A, y deducir, a partir de todos los datos obtenidos, el espectro de A.

(b.2) (4 ptos.) Hallar la ecuación reducida de la cuádrica.

Ejercicio 4

(a) (3 ptos.) Comprobar que, para una matriz real y simétrica, vectores propios asociados a valores propios distintos, son ortogonales.

(b) Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b.1) (4 ptos.) Hallar $\sigma(A)$, los subespacios propios y comprobar que estos subespacios son ortogonales entre sí.

(b.2) (3 ptos.) Diagonalizar A encontrando las matrices P ortogonal y D diagonal, tales que permiten escribir la relación $A = PDP^T$.