Examen de Álgebra*

ETSICCP, UPV. Enero 2011

Ejercicio 1

Considerar los subespacios

$S =< \{(1,1,1),(1,0,1)\} >$; $T = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 + x_3 = 0; \, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

(a) (2 ptos.) Hallar las ecuaciones implícitas de S y una base de T.

(b) (2 ptos.) Comprobar que S y T son suplementarios.

(c) (1 pto.) Construir una base B de $\mathbb{R}^3$, de modo que $B = B_1 \bigcup B_2$, siendo B_1 y B_2 bases de S y T respectivamente.

(d) (3 ptos.) Calcular las coordenadas del vector $x = (1,2,1)$ en la base B y hallar los vectores $u \in S$, $v \in T$, de modo que $x = u + v$.

(e) (2 ptos.) Descomponer un vector genérico $z = (z_1, z_2, z_3)$ como suma de un vector de S más otro vector de T.

*Quienes se presenten al primer parcial, deben resolver los ejercicios 1, 2 y 3. Quienes se presenten a toda la asignatura, los ejercicios 3, 4 y 5.

Ejercicio 2

(a) Considerar la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;/\; f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_1, 2x_1)$.

- **(a.1)** (2 ptos.) Hallar $f_{C\times C}$, su matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- **(a.2)** (2 ptos.) Dar una base de $ker\, f$ y las ecuaciones implícitas de $Im\, f$.
- **(a.3)** (1 pto.) Clasificar la aplicación f.

(b) (3 ptos.) Comprobar que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y calcular $f_{B\times C}$.

(c) (2 ptos.) De una cierta aplicación $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se sabe que

$$g^{-1}(1,1,1) = \{(1,0,0) + (0,\alpha,\beta) / \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv e_1 + < \{e_2, e_3\} > \; .$$

Determinar la relación que existe entre esta aplicación y la f de los apartados anteriores.

Ejercicio 3

(a) (3 ptos.) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de modo que tiene dos valores propios diferentes λ y μ. Si u y v son dos vectores propios asociados a λ y μ, respectivamente, comprobar que $\{u, v\}$ es L.I.

(b) Considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **(b.1)** (1 pto.) Determinar su espectro en función del parámetro α.
- **(b.2)** (2 ptos.) Discutir cuando A es diagonalizable.
- **(b.3)** (4 ptos.) Para $\alpha \neq 0$, determinar una matriz regular P y otra diagonal D, tales que permiten escribir la relación $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 4

(a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, de una simetría ortogonal respecto a cierto subespacio H no trivial ($0 < dim\, H = r < n$).

(a.1) (1 pto.) Determinar el espectro de A.

(a.2) (2 ptos.) Calcular sus subespacios propios, indicando la dimensión de cada uno de ellos.

(b) (3 ptos.) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio $H = <\{(1,0,0),(1,1,1)\}>$ Hallar la matriz A asociada a la simetría ortogonal respecto de H en la base canónica.

(c) (4 ptos.) Dado el vector $x = (1,3,1)$, hallar su simetría ortogonal y su proyección ortogonal respecto del subespacio H del apartado anterior.

Ejercicio 5

(a) Considerar la forma cuadrática

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3\,; \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(a.1) (1 pto.) Hallar la matriz simétrica A de modo que $\Phi(x) = x^T A x$.

(a.2) (3 ptos.) Calcular la descomposición LDL^T de la matriz A.

(a.3) (2 ptos.) Clasificar la forma cuadrática, según los valores de α.

(b) Sea k la cuádrica

$$k \equiv [\,x_1\ x_2\ x_3\ 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,; \quad \beta \in \mathbb{R}\,.$$

(b.1) (1 pto.) Comprobar que es degenerada para $\beta = 0$.

(b.2) (3 ptos.) Clasificar la cuádrica según sea $\beta > 0$ ó $\beta < 0$.