Examen de Álgebra*

ETSICCP, UPV. Abril 2011.

Ejercicio 1

Considerar los subespacios

$S =< \{(1,1,1),(0,0,1)\} >$; $T = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - x_3 = 0;\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$.

(a) (3 ptos.) Hallar las ecuaciones implícitas de S y una base de T.

(b) (3 ptos.) Comprobar que S y T son suplementarios.

(d) (4 ptos.) Considerar la base $B = B_1 \bigcup B_2$, donde B_1 y B_2 son bases de S y T respectivamente. Calcular las coordenadas del vector $x = (1,2,1)$ en la base B y hallar los vectores $u \in S,\ v \in T$, de modo que $x = u+v$.

Ejercicio 2

(a) (3 ptos.) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, de una proyección ortogonal en un cierto subespacio H no trivial ($0 < dim\, H \ = r \ < n$). Determinar el espectro de A y calcular sus subespacios propios, indicando la dimensión de cada uno de ellos.

(b) (3 ptos.) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio $H =< \{(1,0,0),(1,1,1)\} >$ Hallar la matriz A asociada a la proyección ortogonal sobre H en la base canónica.

(c) (4 ptos.) Dado el vector $x = (1,3,1)$, hallar su proyección ortogonal y su simétrico ortogonal respecto del subespacio H del apartado anterior.

*Quienes se presenten al segundo parcial, deben resolver los ejercicios 2, 3 y 4. Quienes se presenten a toda la asignatura, los ejercicios 1, 2 y 3.

Ejercicio 3

(a) Considerar la forma cuadrática

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_2x_3\,; \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(a.1) (1 pto.) Hallar la matriz simétrica A de modo que $\Phi(x) = x^T A x$.

(a.2) (3 ptos.) Calcular la descomposición LDL^T de la matriz A.

(a.3) (2 ptos.) Clasificar la forma cuadrática, según los valores de α.

(b) (4 ptos.) Clasificar la cuádrica

$$k \equiv [\, x_1 \; x_2 \; x_3 \; 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,; \quad \beta \in \mathbb{R}\,.$$

según los valores de β .

Ejercicio 4

(a) Considerar $M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a.1) (1 pto.) Determinar su espectro en función del parámetro α.

(a.2) (1 pto.) Justificar que M es diagonalizable.

(a.3) (2 ptos.) Para $\alpha \neq 0$, determinar una matriz regular P y otra diagonal D, tales que permiten escribir la relación $M = PDP^{-1}$.

(b) Considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b.1) (2 ptos.) Determinar su espectro.

(b.2) (4 ptos.) Calcular una matriz ortogonal P y otra diagonal D, tales que permiten escribir la relación $A = PDP^T$.